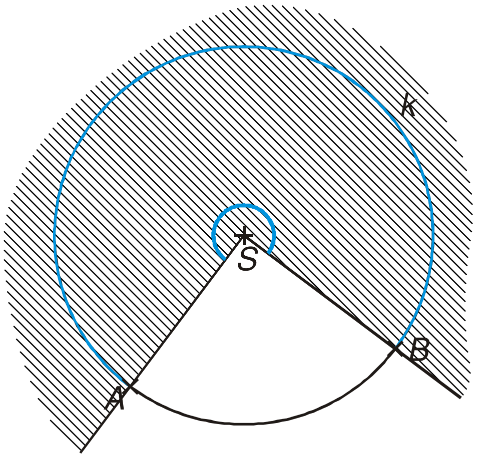
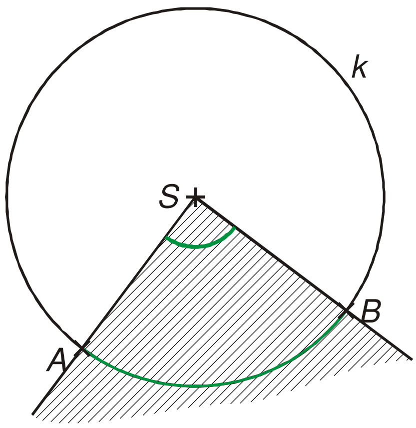
3.2.9 Věta o středovém a obvodovém úhlu

Předpoklady:

Body A, B rozdělují kružnici k na dva oblouky. Polopřímky SA a SB pak rozdělují rovinu na dva úhly. Vrcholy obou úhlů leží ve středu kružnice $\Rightarrow$ říkáme, že jde o **středové úhly příslušné oblouku *AB***.



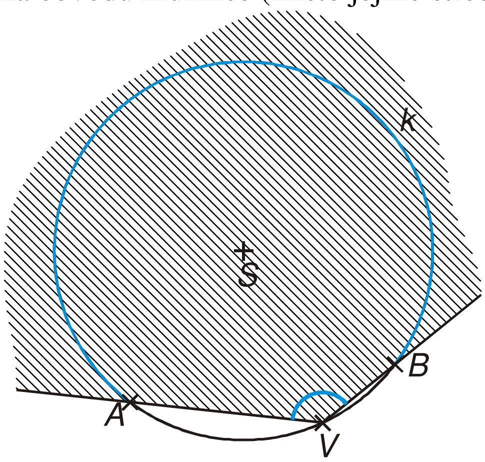
Většímu oblouku AB přísluší nekonvexní středový úhel.



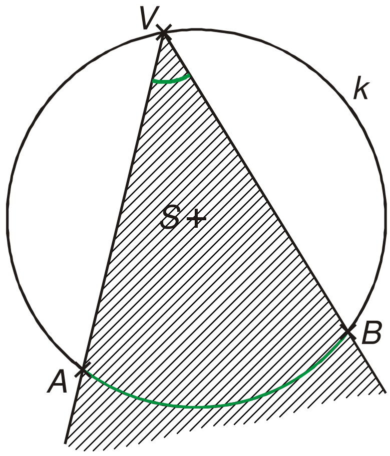
Menšímu oblouku AB přísluší konvexní středový úhel.

Dodatek: **Definice:** Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá **středový úhel příslušný k** tomu **oblouku *AB***, který v tomto úhlu leží.

Kromě středového úhlu můžeme k oběma obloukům najít i **úhly obvodové**. Jejich vrcholy leží na obvodu kružnice (místo jejího středu).



Obvodový úhel příslušný většímu oblouku AB.

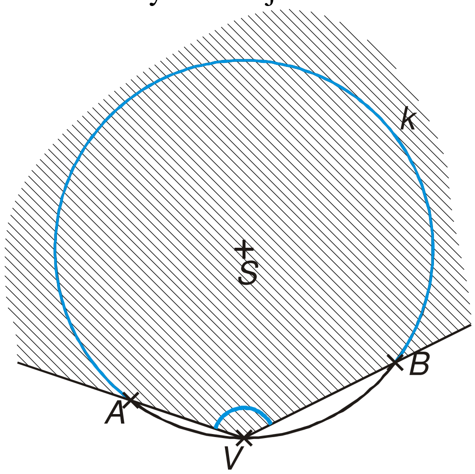


Obvodový úhel příslušný menšímu oblouku AB.

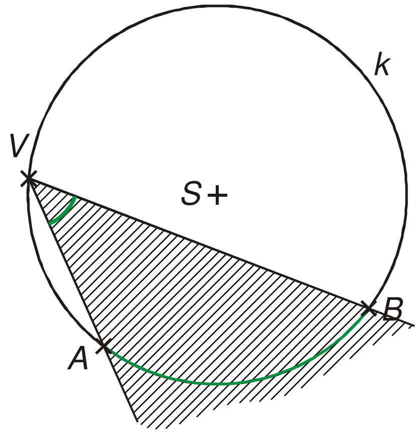
Dodatek: **Definice:** Úhel, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k ($V \neq A$, $V \neq B$), se nazývá **obvodový úhel příslušný k** tomu **oblouku *AB***, který v tomto úhlu leží.

Velký rozdíl:

- středový úhel určen jednoznačně (kružnice má pouze jeden střed),
- obvodových úhlů je nekonečně mnoho (druhý oblouk má nekonečně mnoho bodů.



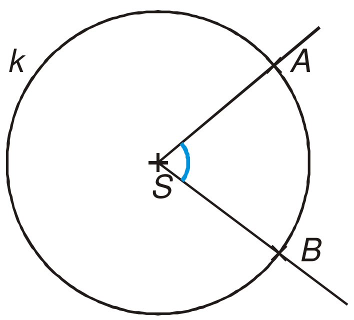
Obvodový úhel příslušný většímu oblouku *AB*.



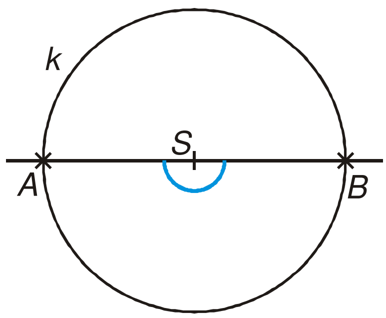
Obvodový úhel příslušný menšímu oblouku *AB*.

Pedagogická poznámka: Samozřejmě je daleko lepší nakreslit několik úhlů na tabuli, než promítat dva statické obrázky z projektoru.

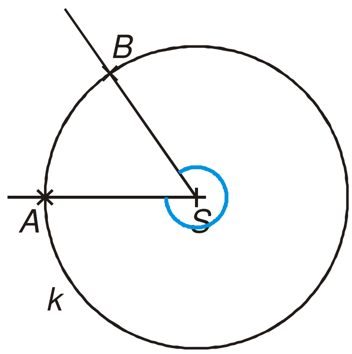
Př. 1: Doplň do obrázků k nakresleným středovým úhlům úhly obvodové.



a)

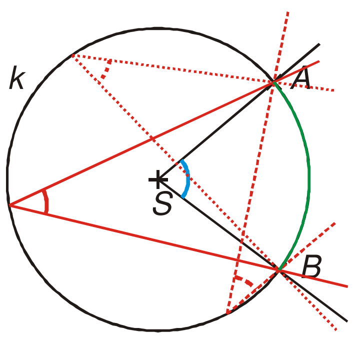


b)

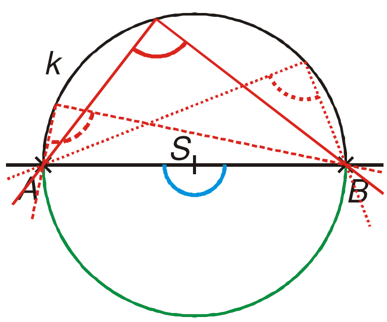


c)

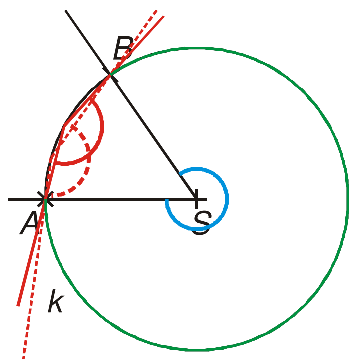
Ve všech případech existuje nekonečně mnoho množností. Například:



a)



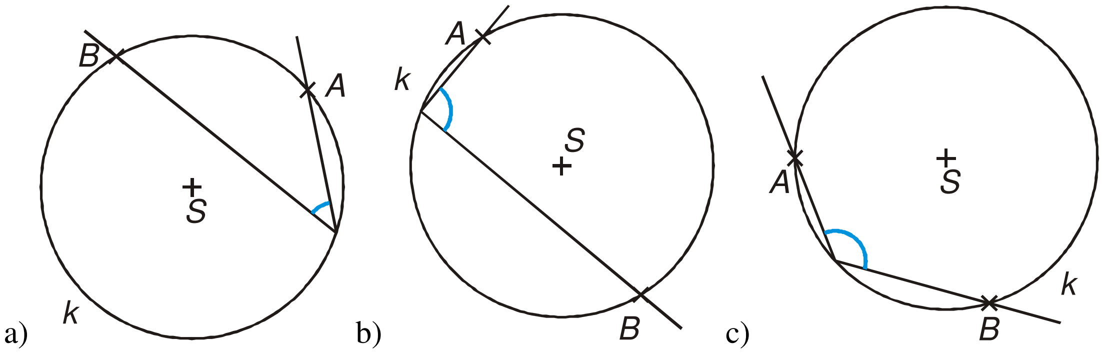
b)



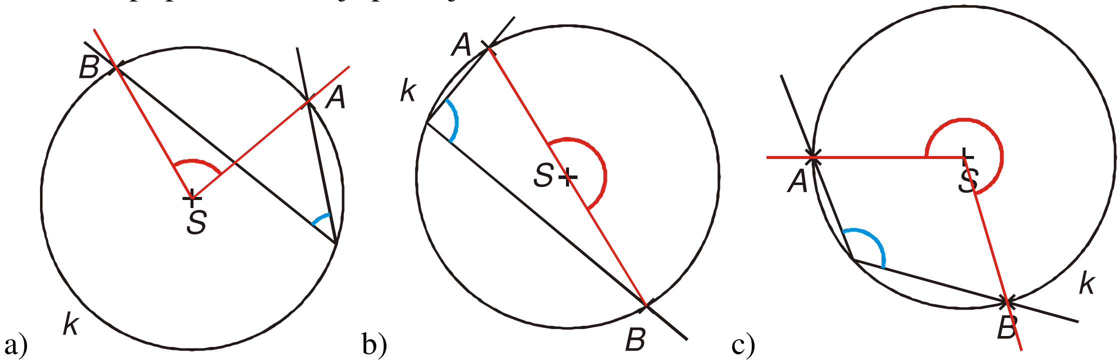
c)

Pedagogická poznámka: Body b) a c) nejsou pro studenty samozřejmé. Pokud mají problémy, nechte je, aby si vyznačili oblouk, ke kterému středový úhel patří.

Př. 2: Doplň do obrázků k nakresleným obvodovým úhlům jejich úhly středové.

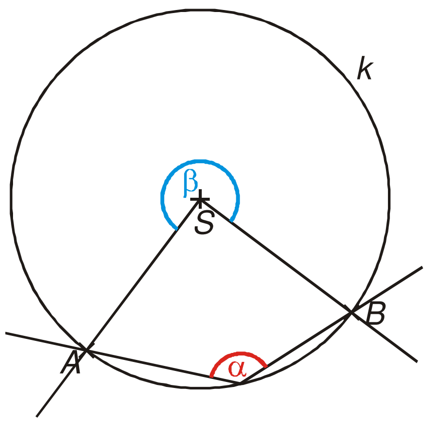


Ve všech případech existuje právě jedno řešení:



Pedagogická poznámka: Ve třídě vždy žáky při následujícím příkladu rozdělím a část z nich hledá úhly příslušející většímu oblouku (v opačném případě všichni rýsují úhly příslušející menšímu oblouku).

Př. 3: Narýsuj kružnici *k*, vyznač na ní dva navzájem různé body *A*, *B* a dvojici středový a obvodový úhel pro jeden z oblouků, který body *A*, *B* na kružnici vytknou. Změř oba vyznačené úhly a najdi vztah mezi nimi.



Pro úhly na obrázku platí:
$\alpha = 135°$
$\beta = 270°$

⇒ Zdá se, že středový úhel je dvakrát větší než příslušný úhel obvodový.

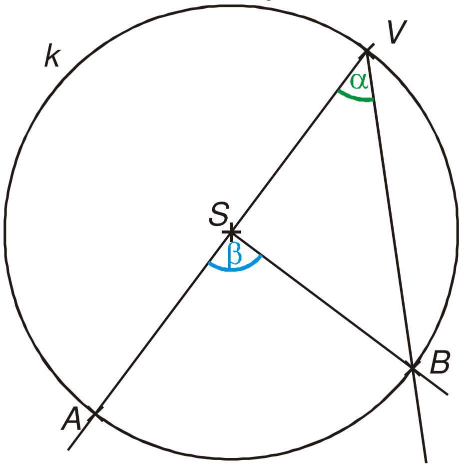
Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Předchozí věta má několik zajímavých a důležitých důsledků a není samozřejmá ⇒ provedeme důkaz.

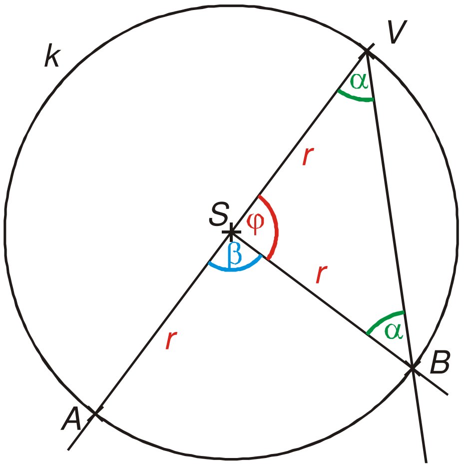
Pedagogická poznámka: V hodině nedokazuji na tabuli klasicky. Nechávám na žácích, aby sami hledali další kroky. Nejdříve nakreslím na tabuli jen kružnici se středovým úhlem a hledáme takové postavení vrcholového úhlu, ve kterém by mohl být důkaz nejjednodušší. Žáci většinou navrhují rozdělit středový úhel osou a tu protáhnout tak, aby její průsečík s kružnicí určil vrchol *V*. Je zajímavé (a upozorňuji na to), že tím vlastně vytvoří dvojitou situaci, se kterou později také někdo přijde a ze které pak doopravdy dokazujeme.

Nejjednodušší možnost: úhly příslušející menšímu oblouku:

1. střed kružnice leží na jednom z ramen obvodového úhlu *AVB*.



Využijeme speciální vlastnosti situace: body *V*, *B*, *A* leží na kružnici *k* $\Rightarrow$ jejich vzdálenost od středu kružnice je shodná $\Rightarrow$ označíme ji *r*.



Trojúhelník *SBV* je rovnoramenný $\Rightarrow$ úhly *SVB* a *VBS* jsou shodné $\Rightarrow$ pro úhel φ platí:

$$\varphi = 180° - 2\alpha .$$

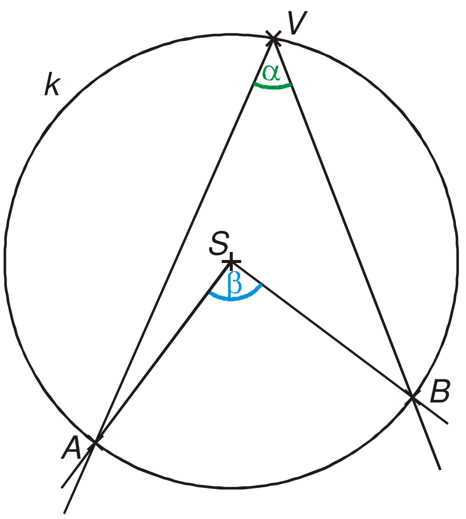
Úhel *ASV* je úhel přímý $\Rightarrow$ platí:

$$\beta = 180° - \varphi = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$$

Platí: $\beta = 2\alpha$.

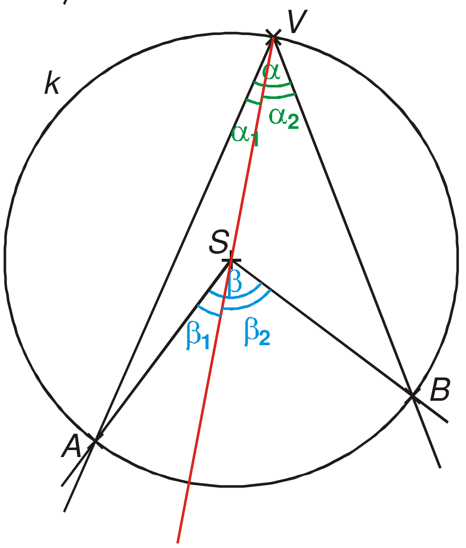
Ještě nejsme hotoví. K nakreslenému středovému úhlu *ASB* náleží nekonečně mnoho obvodových úhlů, z nichž pouze dva mají speciální polohu, pro kterou jsme větu dokázali. Zkusíme další možnosti:

2. střed kružnice leží uvnitř obvodového úhlu *AVB*.



Máme dvě možnosti:

- vymyslet celý důkaz od začátku,
- upravit obrázek tak, abychom mohli použít předchozí důkaz pro speciální situaci se středem na rameni obvodového úhlu.

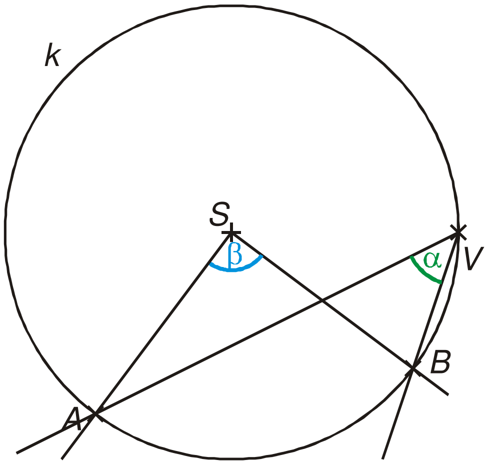


Polopřímka *VS* rozdělí oba úhly na dvě části, střed kružnice *S* leží na společném rameni *VS* obou vzniklých obvodových úhlů $\Rightarrow$

- platí $\beta_1 = 2\alpha_1$ (předchozí část důkazu),
- platí $\beta_2 = 2\alpha_2$ (předchozí část důkazu),

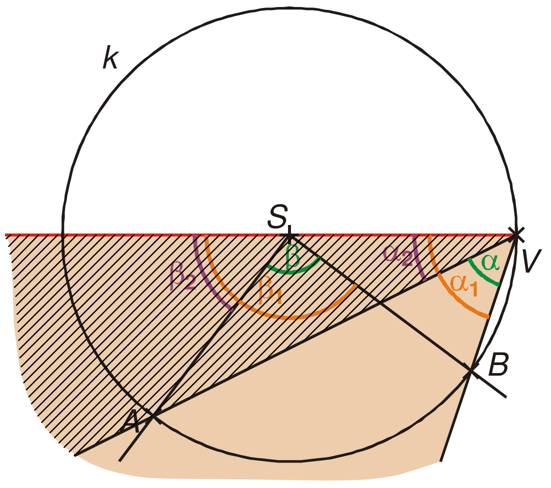
$\Rightarrow\ \beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$

3. střed kružnice leží vně obvodového úhlu *AVB*.



Opět dvě možnosti:

- vymyslet celý důkaz od začátku,
- upravit obrázek tak, abychom mohli použít předchozí důkaz pro speciální situaci se středem na rameni obvodového úhlu.



Polopřímka *VS* vytvoří v obrázku další dvě dvojice středový a obvodový úhel, střed kružnice *S* leží na společném rameni *VS* obou vzniklých obvodových úhlů $\Rightarrow$

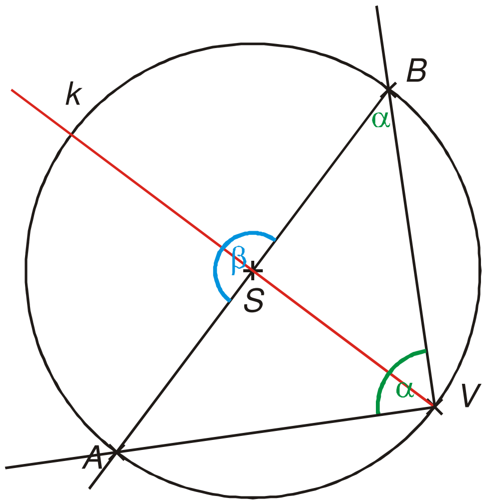
- platí $\beta_1 = 2\alpha_1$ (předchozí část důkazu),
- platí $\beta_2 = 2\alpha_2$ (předchozí část důkazu),

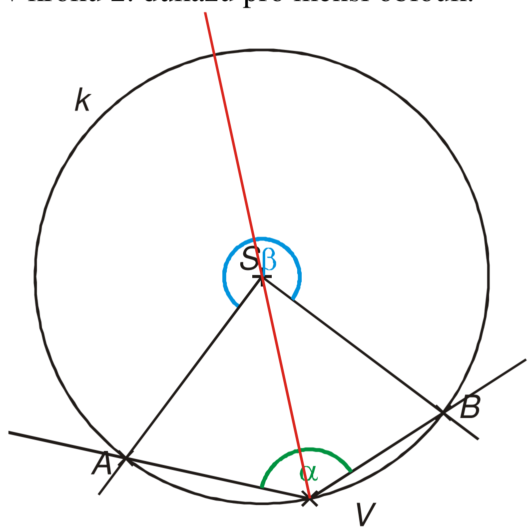
$\Rightarrow \beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2\alpha$

Žádná další možná poloha neexistuje $\Rightarrow$ dokázali jsme větu pro všechny úhly příslušející menšímu oblouku.

Př. 4: Navrhni důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu pro větší oblouk a půlkružnici

V obou případech můžeme postupovat stejně jako v kroku 2. důkazu pro menší oblouk.





Př. 5: Jaké má věta o obvodovém a středovém úhlu důsledky?

Všechny obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou shodné.
(všechny jsou polovinou stejného středového úhlu)

Thaletova věta: Všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.
(Úhly nad průměrem kružnice jsou obvodové úhly ke středovému úhlu o velikosti $180°$).

Př. 6: Doplň věty uvádějící důsledky věty o obvodovém a středovém úhlu.
a) Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je …
b) Obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je …
c) Obvodový úhel příslušný k půlkružnici je …

Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je ostrý.
Obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je tupý.

Obvodový úhel příslušný k půlkružnici je pravý = Thaletova věta.

Shrnutí: Středový úhel je dvakrát větší než příslušný obvodový úhel.